Под редакцией Д.А. Мальцева

МАТЕМАТИКА
9 класс
ОГЭ 2019
РЕШЕБНИК

✓ *решения задач части 2 тестов*

✓ *решения задач из задачника*

✓ *геометрический тренинг*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2017

Содержание

От авторов

Данная книга состоит из трёх параграфов. В §1 содержится основной материал данного пособия — решения заданий второй части тестов книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2019». В §2 приведены решения каждой второй задачи из задачника этой книги. А в §3 дана подборка геометрических задач (и их решения), которые составлены по мотивам заданий №20 тестов вышеуказанной книги.

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

§ 1. Решения задач учебно-тренировочных тестов

Тест №1

21 Решите уравнение $(10-8x)^4+8(8x-10)^2-9=0$.

Решение.

Сделав замену $t=(8x-10)^2$, получим уравнение $t^2+8t-9=0$. Корнями данного уравнения являются $t=1$ и $t=-9$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $(8x-10)^2=1$ и $(8x-10)^2=-9$. Уравнение $(8x-10)^2=-9$ не имеет корней. Уравнение $(8x-10)^2=1$ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}8x-10=1\\8x-10=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x=11\\8x=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1{,}375\\x=1{,}125\end{array}\right.$$

Ответ: 1,125; 1,375

22 Первые 180 км пути автомобиль ехал со скоростью 100 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 80 км/ч, а оставшиеся 15 км — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Найдём время, затраченное автомобилем на каждый из участков пути:

для первых 180 км время в пути равно $\dfrac{180}{100}=1{,}8$ часа;

для следующих 120 км время в пути равно $\dfrac{120}{80}=1{,}5$ часа;

для последних 15 км время в пути равно $\dfrac{15}{75}=0{,}2$ часа.

Так как общее время в пути составило $1{,}8+1{,}5+0{,}2=3{,}5$ часа, а длина всего пути равна $180+120+15=315$ км, то средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна $\dfrac{315}{3{,}5}=90$ км/ч.

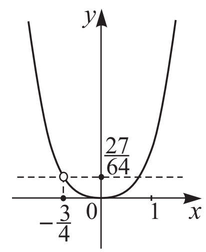
Ответ: 90

23 Постройте график функции $y=\dfrac{(4x^3+3x^2)\cdot|x|}{4x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию:
$\dfrac{4x^3+3x^2}{4x+3}=\dfrac{x^2\cdot(4x+3)}{4x+3}=x^2$, если $4x+3\neq 0$.

Таким образом, при любом $x\neq -\dfrac{3}{4}$ значение данной в условии функции совпадает со значением функции $y=x^2\cdot|x|$, или, что то же самое, $y=|x^3|$. Поэтому графиком этой функции является график функции $y=|x^3|$ с выколотой точкой $x=-\dfrac{3}{4}$, $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$ (при $x=-\dfrac{3}{4}$ данная в условии функция не определена). График функции $y=|x^3|$ получается из графика функции $y=x^3$ симметричным отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже оси Ox. Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.



Из рисунка следует, что прямая $y=m$ имеет с графиком данной в условии функции ровно одну общую точку при $m=0$ и $m=\dfrac{27}{64}$.

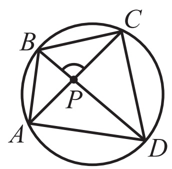
Ответ: 0; $\dfrac{27}{64}$

24 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Градусная мера меньшей дуги окружности, стягиваемой хордой BC, равна $100°$, а градусная мера меньшей дуги окружности, стягиваемой хордой AD, равна $150°$. Найдите градусную меру угла APB.

Решение.

Заметим, что поскольку $\angle BPC$ — внешний угол треугольника ABP, то

$$\angle BPC=\angle BAC+\angle ABD.$$



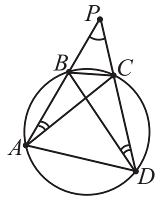
Так как вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$, $\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ$. Отсюда имеем: $\angle BPC = 50^\circ + 75^\circ = 125^\circ$, $\angle APB = 180^\circ - \angle BPC = 55^\circ$.

Ответ: 55

25 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, P — точка пересечения продолжений сторон AB и CD. Докажите, что $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Решение.

Заметим, что $\angle BAC = \angle BDC$ — как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, см. рисунок.



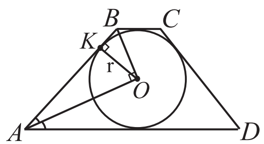
Так как в треугольниках APC и DPB угол общий, а угол A треугольника APC равен углу D треугольника DPB, то $\triangle APC$ подобен $\triangle DPB$ (по двум равным углам).

Из подобия треугольников APC и DPB следует, что $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$. Отсюда (по правилу пропорции) получаем: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$, что и требовалось доказать.

26 Окружность радиуса 12 вписана в равнобедренную трапецию. Точка касания окружности с боковой стороной трапеции делит эту сторону в отношении $1 : 4$. Найдите периметр трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция, O — центр вписанной в неё окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB, см. рисунок, и пусть $BK = x$.



Так как по условию $BK : AK = 1 : 4$, то $AK = 4x$. Лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC, сумма которых равна 180°, поэтому

$$\angle BAO + \angle ABO = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Следовательно, $\triangle AOB$ — прямоугольный. Так как OK — радиус, проведённый в точку касания, то $OK \perp AB$. По формуле длины высоты прямоугольного треугольника имеем: $OK = \sqrt{AK \cdot BK}$, $OK = \sqrt{4x \cdot x} = 2x$. По условию, $OK = 12$. Значит, длина боковой стороны трапеции равна $CD = AB = AK + BK = 5x = 30$. Необходимым условием того, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, является равенство $AB + CD = BC + AD$. Отсюда получаем, что $BC + AD = 60$, а периметр трапеции равен 120.

Ответ: 120

Тест № 3

21 Решите неравенство $(4x-3)^4 - 34(4x-3)^2 - 72 \leqslant 0$.

Решение.

Сделав замену неизвестного $t = (4x-3)^2$, получим неравенство $t^2 - 34t - 72 \leqslant 0$. Раскладывая левую часть неравенства на множители, получаем: $(t+2)(t-36) \leqslant 0$. Решениями полученного неравенства являются $-2 \leqslant t \leqslant 36$. Возвращаясь к неизвестному x, имеем: $-2 \leqslant (4x-3)^2 \leqslant 36$. Т.к. $(4x-3)^2 \geqslant 0$ для всех значений x, то, решив неравенство $(4x-3)^2 \leqslant 36$, получим искомые $x: (4x-3)^2 - 36 \leqslant 0$, $(4x-3-6)(4x-3+6) \leqslant 0$, $(4x-9)(4x+3) \leqslant 0$, $-0{,}75 \leqslant x \leqslant 2{,}25$.

Ответ: $[-0{,}75; 2{,}25]$

22 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие три часа — со скоростью 90 км/ч, а затем один час — со скоростью 65 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

За первые два часа автомобиль проехал $2 \cdot 80 = 160$ км, за следующие 3 часа автомобиль проехал $3 \cdot 90 = 270$ км, а за последний час — 65 км. Длина всего пути, пройденного автомобилем, равна $160 + 270 + 65 = 495$ км, а время, затраченное на этот путь, составило $2+3+1 = 6$ часов.

Поэтому средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна $\dfrac{495\text{ км}}{6\text{ ч}} = 82{,}5$ км/ч.

Ответ: 82,5

23 Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+x-2)\cdot|x-2|}{x-1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

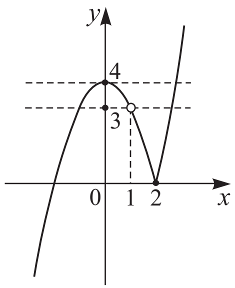
Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию: $\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-1} = x+2$, если $x-1 \neq 0$.

Таким образом, при любом $x \neq 1$ значение данной в условии функции совпадает со значением функции $y = (x+2)\cdot|x-2|$. Снимая знак модуля в выражении $(x+2)\cdot|x-2|$, имеем:

$$y = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ при } x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \\ x^2 - 4, \text{ при } x \in [2; +\infty) \end{cases}$$

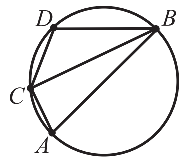
Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.



Из рисунка следует, что прямая $y = m$ имеет с графиком данной в условии функции ровно две общие точки при $m = 0$, $m = 3$ и $m = 4$.

Ответ: $0; 3; 4$

24 В окружности проведены диаметр AB и не пересекающая этот диаметр хорда CD, при этом хорды AC и BD также не пересекаются (см. рисунок). Угол ABC равен $22°$. Найдите градусную меру угла CDB.



Решение.

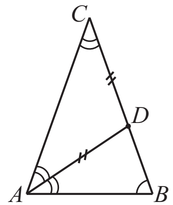
Так как $\angle ABC = 22°$, то градусная мера дуги AC равна $44°$ (угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается). Градусная мера дуги BAC равна $180° + 44° = 224°$ (дуга BA равна $180°$, поскольку AB — диаметр). Следовательно, $\angle CDB = \dfrac{1}{2}\cdot 224° = 112°$.

Ответ: 112

25 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Оказалось, что $CD = AD$. Докажите, что при этом будет выполнено следующее равенство: $AB^2 = BC \cdot BD$.

Решение.

Так как $AD = CD$, то $\angle CAD = \angle ACD$ — как углы при основании равнобедренного треугольника. А поскольку AD — биссектриса, то $\angle CAD = \angle BAD$. Поэтому $\angle ACD = \angle BAD$, см. данный ниже рисунок.



Заметим, что у треугольников ABD и CAB равны углы при вершинах A и C ($\angle BAD = \angle ACD$), а угол при вершине B общий. Следовательно, эти треугольники подобны (по двум равным углам).

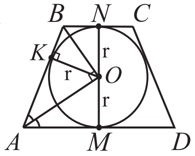
Из подобия треугольников ABD и CAB имеем: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$. Отсюда по правилу пропорции получаем: $BD \cdot BC = AB^2$, что и требовалось доказать.

26 В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 26, вписана окружность, при этом боковая сторона делится точкой касания в отношении $4 : 9$. Через центр окружности и вершину большего основания трапеции проведена прямая. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от трапеции этой прямой.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция, O — центр вписанной в неё окружности. Найдём длины боковых сторон, оснований, а также высоту h трапеции. Пусть $K-$ точка касания вписанной окружности со стороной AB, см. рисунок 1.

рис.1

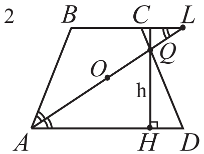


По условию, $BK : AK = 4 : 9$. Пусть $BK = 4x$, тогда $AK = 9x$, $AB = CD = 13x$. Так как в четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, то $BC + AD = AB + CD = 26x$. По условию периметр трапеции равен 26, откуда находим: $52x = 26$, $x = \frac{1}{2}$, $BK = 2$, $AK = \frac{9}{2}$, $AB = \frac{13}{2}$.

Далее, лучи AO и $BO-$ биссектрисы углов BAD и ABC, сумма которых равна $180°$, поэтому $\angle BAO + \angle ABO = \frac{180°}{2} = 90°$ и, значит, $\triangle AOB-$ прямоугольный. Так как $OK-$ радиус, проведённый в точку касания, то $OK \perp AB$. По формуле длины высоты прямоугольного треугольника имеем: $r = OK = \sqrt{AK \cdot BK} = \sqrt{9} = 3$. Осталось лишь заметить, что $h = 2r = 6$, $AD = 2AM = 2AK = 9$, $BC = AB + CD - AD = 4$.

2) Площадью треугольника, отсекаемого от трапеции прямой, проходящей через вершину большего основания трапеции и точку O, является площадь треугольника AQD, см. рисунок 2 (для треугольника, отсекаемого прямой DO, в силу симметричности равнобедренной трапеции получается то же самое значение).

рис. 2



Чтобы найти площадь треугольника AQD, найдём его высоту QH. Заметим, что в силу подобия треугольников AQD и LQC, см. рисунок 2, справедливо соотношение: $\frac{QH}{h - QH} = \frac{AD}{CL}$ $(*)$. Поскольку $\angle ALB =$ $= \angle LAD$, а $\angle LAD = \angle BAL$, то $\angle ALB = \angle BAL$, и, значит, $BL = AB$. Отсюда $CL = BL - BC = \frac{13}{2} - 4 = \frac{5}{2}$ и, подставляя в соотношение $(*)$ $h = 6$, $AD = 9$, $CL = \frac{5}{2}$, получаем: $\frac{QH}{6 - QH} = \frac{18}{5}$, $5QH = 108 - 18QH$,

$QH = \frac{108}{23}$. Итак, площадь треугольника AQD равна:

$$S_{AQD} = \frac{1}{2} AD \cdot QH = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{108}{23} = \frac{486}{23}.$$

Ответ: $\frac{486}{23}$

Тест № 5

$\boxed{21}$ Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ \frac{x-2}{3} + \frac{y}{4} = -1. \end{cases}$

Решение.

Данная в условии система уравнений равносильна системе:

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4 \cdot (x - 2) + 3y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 3y = -4 \end{cases} \quad (*)$$

Умножая первое уравнение системы $(*)$ на 2 и вычитая из него второе уравнение, получим: $-y = 6$, $y = -6$. Подставим найденное значение y в первое уравнение системы $(*)$: $2x - 6 = 1$, $2x = 7$, $x = 3{,}5$.

Ответ: $(3{,}5; -6)$

$\boxed{22}$ Смесь сухофруктов состоит из чернослива, инжира и манго. Чернослива в этой смеси на 80% больше, чем инжира, а манго в $1{,}5$ раза меньше, чем чернослива. Сколько процентов инжира содержит данная смесь сухофруктов?

Решение.

Пусть в смеси содержится $x\,\%$ инжира. Тогда процентное содержание чернослива равно $x + 0{,}8x = 1{,}8x$. А манго составляет $\frac{1{,}8x}{1{,}5} = 1{,}2\,x\,\%$ смеси. Так как суммарное процентное содержание всех компонентов смеси равно 100%, получаем: $x + 1{,}8x + 1{,}2x = 100$, $4x = 100$, $x = 25$. Значит, данная смесь содержит 25% инжира. *Ответ:* 25

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} \text{ при } x \leqslant -1, \\ -x + 2 \text{ при } -1 < x \leqslant 3, \\ -x^2 + 8x - 16 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

§ 3. Геометрический тренинг

Определите, какие из приведённых ниже утверждений верны, а какие нет. Дайте обоснованный ответ.

1. Если катет и один из острых углов прямоугольного треугольника равны катету и углу другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны.

2. Если два прямоугольных треугольника имеют равные площади и равные гипотенузы, то эти треугольники равны.

3. Если два угла четырёхугольника тупые, то другие два угла этого четырёхугольника — острые.

4. Выпуклый четырёхугольник имеет не более двух острых углов.

5. Если все углы одного параллелограмма равны углам другого параллелограмма, то такие параллелограммы подобны.

6. Если каждая из сторон одного параллелограмма ровно вдвое больше стороны другого, то такие параллелограммы подобны.

7. Если два прямоугольника подобны друг другу и площади этих прямоугольников равны, то эти прямоугольники равны.

8. Если удвоенная площадь треугольника равна произведению длин двух его сторон, то этот треугольник является прямоугольным.

9. Если площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей, то этот прямоугольник является квадратом.

10. Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны друг другу и равны, то этот четырёхугольник — квадрат.

11. Если параллелограмм имеет хотя бы одну ось симметрии, то он является ромбом.

12. Если у фигуры есть центр симметрии, то у неё есть и ось симметрии.

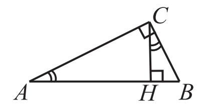
13. Если выпуклый многоугольник имеет и центр симметрии и ось симметрии, то этот многоугольник является правильным.

14. Если некоторая прямая делит пополам периметр правильного пятиугольника, то она проходит через его центр.

15. Если некоторая прямая делит пополам периметр правильного шестиугольника, то она проходит через его центр.

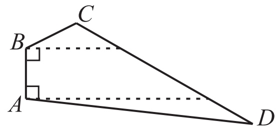
Ответы и краткие решения

1. Нет. На рисунке справа приведён контрпример: у прямоугольных треугольников ACH и BCH катет CH является общим, а угол CAH равен углу BCH, но очевидно, что эти треугольники не равны.

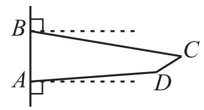


2. Верно. См. решение задачи 25 теста №23.

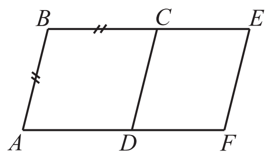
3. Нет. См. контрпример на рисунке справа: в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B, C тупые.



4. Нет. См. контрпример на рисунке справа: в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B, C острые.



5. Нет. См контрпример на данном ниже рисунке: у параллелограммов $ABCD$ и $ABEF$ все углы равны, но параллелограмм $ABEF$ не может быть получен растяжением в несколько раз параллелограмма $ABCD$, поскольку у параллелограмма $ABCD$ все стороны равны, а у $ABEF$ — нет.



6. Нет. См контрпример на данном ниже рисунке: параллелограмм $AEFG$ получен гомотетией параллелограмма $ABCD$ с коэффициентом 2 и центром гомотетии в точке A, а прямоугольник $EFLK$ построен на отрезке EF так, что $FL = FG$. Очевидно, что $FL = 2AB$, $EF = 2AD$, но парал-